باسمه تعالی

نام و نام خانوادگی: علی وکیلیان شماره دانشجويي: 86109268 رشته: مهندسی برق

زير گروه:C تاريخ انجام آزمايش: 14 اریبهشت 1387 ساعت: 13:30

دستيار آموزشی: آقای اسعدزاده

**آزمايش شماره:** 9

**عنوان آزمايش:** اندازه گيری لختی دورانی

**هدف:** اندازه گيری لختی دورانی

**وسايل مورد نياز:** 1- چرخ متصل به بلبرينگ و پايه 2 - اجسام با لختی دورانی مختلف شامل ميله، ديسک، کره و پوسته ی کروی و استوانه ی توپر و پوسته ای 3 - دستگاه ثبت کننده ی زمان (شمارنده) 4 - کفه 5 - وزنه 6 - متر 7 - ترازو 8 - مقداری نخ محکم 9 - حسگر نوری

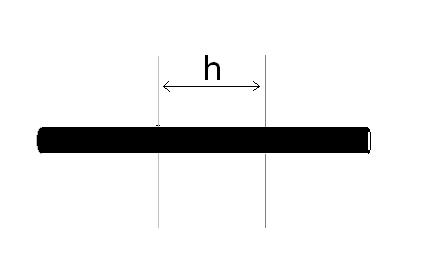
**نظريه**

در اين آزمايش حرکت دورانیحول محوری ثابت برای جسمی صلب بررسی می کنیم. همان طور که از فیزیک 1 به یاد داریم ارتباط تنگاتنگی بین پارامترهای حرکت خطی و حرکتی دورانی وجود دارد که در جدول زیر کنار هم آمده اند.

|  |  |
| --- | --- |
| دستگاه حرکت دورانی | دستگاه حرکت خطی |
| (r, | (x,y) |
|  | x |
|  | v |
|  | a |
| I (لختی دورانی) | M |
| (گشتاور) | F |

همان طور که در جدول ديده می شود، معادل جرم (لختی انتقالی) لختی دورانی تعريف می شود که تنها به مشخصات ظاهری جسم وابسته نیست و به مکان محور دوران نیز وابسته است. لختی دورانی يک ذره با جرم m که در فاصله ی r از محور دوران قرار دارد، به صورت  تعريف می شود. بنابراين برای يک جسم گسترده که از بيشمار ذره تشکيل شده است، به شکل در می آید.

اگر لختی دورانی جسمی به جرم M حول محوری که از مرکز جرم آن می گذرد I باشد، لختی دورانی آن حول محوری موازی با آن و به فاصله ی h از آن برابر  خواهد بود:



در ادامه لختی دورانی چند جسم خاص آورده شده است:

ميله (يا ديسک) صلب حول قطر مرکزی ميله (يا ديسک) صلب حول محور اصلی

سيلندر حول محور مرکزی کره تو پر

کره تو خالی (پوسته ی کروی)



**مراحل انجام آزمايش**

**الف) اندازه گيری لختی دورانی**

اجسامی را که می خواهيم برای آنها لختی دورانی حساب کنیم، روی بلبرينگ قرار می دهيم و نخی را به بلبرينگ وصل می کنيم و سر ديگر نخ را به وزنه ای با جرم مشخص( gr150) می بنديم تا بين دو حسگر سقوط می کند که لحظه ی قبل از سقوط، دقیقاً قبل از حسگر ابتدایی قرار داشته باشد. و زمان سقوط وزنه، فاصله ی بين دو حسگر و جرم وزنه ها را اندازه می گيريم. می دانيم لختی دورانی جسمی که دوران می کند، از رابطه ی زير بدست می آيد:



جرم، شعاع و دیگر مشخصات ظاهری جسم را اندازه میگیریم تا بتوانيم با استفاده از آن لختی دورانی جسم را حساب کنیم.

**ب) بررسی قضيه ی محورهاي موازی**

لختی دورانی ديسک پلکسی را در سه حالت اندازه میگیریم .ابتدا حول محور دورانی گذرنده از مرکز و سپس از فواصل 3، 6 و 9 سانتيمتری از مرکز جرم ديسک را دوران می دهيم و لختی دورانی را اندازه می گيريم تا درستی قضيه ی محورهای موازی را تحقیق کنیم.**جدول ها**

جدول 1 - اندازه گيری لختی دورانی ميله ی فلزی

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| رديف | فاصله ی دو حسگر (سانتيمتر) | زمان عبور کفه و وزنه ها بين دو حسگر (ثانيه) | جرم کفه و وزنه های روی آن (گرم) |
| 1 | 70.5 | 5.539 | 149.7 |
| 2 | 70 | 5.639 | 149.7 |
| 3 | 70.5 | 5.492 | 149.7 |

جرم ميله ی فلزی: 308.8 گرم

قطر ميله ی فلزی: 1.06 سانتيمتر

طول ميله ی فلزی: 51 سانتيمتر

جدول 2 - اندازه گيری لختی دورانی پوسته ی کروی

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| رديف | فاصله ی دو حسگر (سانتيمتر) | زمان عبور کفه و وزنه ها بين دو حسگر (ثانيه) | جرم کفه و وزنه های روی آن (گرم) |
| 1 | 70.4 | 3.282 | 149.9 |
| 2 | 70.4 | 3.314 | 149.8 |
| 3 | 70.5 | 3.272 | 149.9 |

جرم پوسته ی کروی: 607.7 گرم

شعاع پوسته ی کروی: 10.0 سانتيمتر

جدول 3 - اندازه گيری لختی دورانی کره

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| رديف | فاصله ی دو حسگر (سانتيمتر) | زمان عبور کفه و وزنه ها بين دو حسگر (ثانيه) | جرم کفه و وزنه های روی آن (گرم) |
| 1 | 70.5 | 4.177 | 149.8 |
| 2 | 70.4 | 4.813 | 149.9 |
| 3 | 70.5 | 4.69 | 149.8 |

جرم کره: 1735.5 گرم

شعاع کره: 7.6 سانتيمتر

جدول 4 - الف اندازه گيری لختی دورانی مجموعه ی پوسته ی استوانه ای و ديسک

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| رديف | فاصله ی دو حسگر (سانتيمتر) | زمان عبور کفه و وزنه ها بين دو حسگر (ثانيه) | جرم کفه و وزنه های روی آن (گرم) |
| 1 | 70.4 | 3.388 | 149.8 |
| 2 | 70.4 | 3.337 | 149.7 |
| 3 | 70.5 | 3.352 | 149.8 |

جرم پوسته ی استوانه ای: 782.2 گرم

قطر متوسط پوسته ی استوانه ای: 11.5 سانتيمتر

طول پوسته ی استوانه ای: 10.9 سانتيمتر

جدول 4 - ب اندازه گيری لختی دورانی ديسک

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| رديف | فاصله ی دو حسگر (سانتيمتر) | زمان عبور کفه و وزنه ها بين دو حسگر (ثانيه) | جرم کفه و وزنه های روی آن (گرم) |
| 1 | 70.6 | 1.535 | 169.8 |
| 2 | 70.6 | 1.71 | 169.7 |
| 3 | 70.5 | 1.475 | 169.8 |

جرم ديسک: 190.1 گرم

شعاع ديسک: 7.2 سانتيمتر

ضخامت ديسک: 1.9 سانتيمتر

جدول 5 - الف اندازه گيری لختی دورانی مجموعه ی استوانه و ديسک

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| رديف | فاصله ی دو حسگر (سانتيمتر) | زمان عبور کفه و وزنه ها بين دو حسگر (ثانيه) | جرم کفه و وزنه های روی آن (گرم) |
| 1 | 70.5 | 4.168 | 149.8 |
| 2 | 70.5 | 4.063 | 149.8 |
| 3 | 70.6 | 4.058 | 149.7 |

جرم استوانه: 1645.8 گرم

شعاع استوانه: 6.5 سانتيمتر

طول استوانه: 11.9 سانتيمتر

جدول 5 - ب اندازه گيری لختی دورانی ديسک

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| رديف | فاصله ی دو حسگر (سانتيمتر) | زمان عبور کفه و وزنه ها بين دو حسگر (ثانيه) | جرم کفه و وزنه های روی آن (گرم) |
| 1 | 70.5 | 1.545 | 149.8 |
| 2 | 70.5 | 1.51 | 149.8 |
| 3 | 70.6 | 1.504 | 149.9 |

جرم ديسک: 145.1 گرم

شعاع ديسک: 7 سامتيمتر

ضخامت ديسک: 2.9 سانتيمتر

جدول 6 - قضيه ی محورهای موازی با ديسک پلکسی برای فاصله ی 0 سامتيمتر

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| رديف | فاصله ی دو حسگر (سانتيمتر) | زمان عبور کفه و وزنه ها بين دو حسگر (ثانيه) | جرم کفه و وزنه های روی آن (گرم) |
| 1 | 71 | 4.407 | 149.7 |
| 2 | 71 | 4.439 | 149.7 |
| 3 | 71.1 | 4.419 | 149.8 |

جرم ديسک: 557.9 گرم

قطر ديسک: 25.1 سانتيمتر

ضخامت ديسک: 0.9 سانتيمتر

جدول 7 - قضيه ی محورهای موازی با ديسک پلکسی برای فاصله ی 3 سانتيمتر

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| رديف | فاصله ی دو حسگر (سانتيمتر) | زمان عبور کفه و وزنه ها بين دو حسگر (ثانيه) | جرم کفه و وزنه های روی آن (گرم) |
| 1 | 71 | 4.825 | 149.7 |
| 2 | 71.1 | 4.591 | 149.8 |
| 3 | 70.9 | 4.91 | 149.7 |

جدول 8 - قضيه ی محورهای موازی با ديسک پلکسی برای فاصله ی 6 سانتيمتر

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| رديف | فاصله ی دو حسگر (سانتيمتر) | زمان عبور کفه و وزنه ها بين دو حسگر (ثانيه) | جرم کفه و وزنه های روی آن (گرم) |
| 1 | 70.9 | 5.482 | 149.7 |
| 2 | 70.9 | 5.46 | 149.8 |
| 3 | 70.8 | 5.586 | 149.7 |

جدول 9 - قضيه ی محورهای موازی با ديسک پلکسی برای فاصله ی 9 سانتيمتر

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| رديف | فاصله ی دو حسگر (سانتيمتر) | زمان عبور کفه و وزنه ها بين دو حسگر (ثانيه) | جرم کفه و وزنه های روی آن (گرم) |
| 1 | 70.9 | 7.945 | 149.9 |
| 2 | 71 | 7.755 | 149.8 |
| 3 | 70.9 | 7.826 | 149.9 |

**خواسته ها**

**خواسته ی 1**

همان طور که در قسمت مراحل انجام آزمايش مشاهده کرديم، لختی دورانی از رابطه ی  بدست می آيد که در آن m جرم کفه و وزنه های متصل به آن، t زمان عبور وزنه از بين دو حسگر، l فاصله ی بين دو حسگر و r شعاع بلبرينگ است که 2.5 cm در نظر گرفته می شود.

با توجه به فرمولهايي که در قسمت نظريه مطرح شد، می توان لختی دورانی اين اجسام را با توجه به مشخصات آنها که اندازه گيری شده (جرم، شعاع و ...) محاسبه کرد. در جداول زير اين مقادير (مقادير اندازه گيری شده و محاسبه شده و درصد خطای نسبی) برای جداول 1 تا 5 آورده شده است: (همه ی لختی های دورانی بر حسب  هستند.)

جدول 10 - لختی دورانی مربوط به جدول 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| رديف | لختی | درصد خطای نسبی |
| 1 | 0.020 | 196.0 |
| 2 | 0.021 | 209.0 |
| 3 | 0.019 | 191.0 |
| ميانگين | 0.020 | 198.6 |

لختی دورانی محاسبه شده: 0.0066

جدول 11 - لختی دورانی مربوط به جدول 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| رديف | لختی | درصد خطای نسبی |
| 1 | 0.0069 | 69.7 |
| 2 | 0.0070 | 72.9 |
| 3 | 0.0069 | 68.4 |
| ميانگين | 0.0069 | 70.3 |

لختی دورانی محاسبه شده:  0.004

جدول 12 - لختی دورانی مربوط به جدول 3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| رديف | لختی | درصد خطای نسبی |
| 1 | 0.011 | 180.2 |
| 2 | 0.015 | 273.6 |
| 3 | 0.014 | 253.9 |
| ميانگين | 0.013 | 235.9 |

لختی دورانی محاسبه شده:  0.004

جدول 13 - لختی دورانی مربوط به جدول 4 (الف و ب)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| رديف | لختی مجموع پوسته و کفه | لختی ديسک | لختی پوسته | درصد خطای نسبی (لختی استوانه) |
| 1 | 0.0074 | 0.0016 | 0.0057 | 138.6 |
| 2 | 0.0071 | 0.0020 | 0.0051 | 111.9 |
| 3 | 0.0072 | 0.0015 | 0.0057 | 137.1 |
| ميانگين | 0.0072 | 0.0017 | 0.0055 | 129.2 |

لختی دورانی محاسبه شده برای پوسته ی استوانه: 0.0024

لختی دورانی محاسبه شده برای ديسک:0.0004

جدول 14 - لختی دورانی مربوط به جدول 5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| رديف | لختی مجموع ديسک و استوانه | لختی ديسک | لختی استوانه | خطای نسبی |
| 1 | 0.011 | 0.001 | 0.010 | 179.9 |
| 2 | 0.011 | 0.001 | 0.009 | 165.8 |
| 3 | 0.011 | 0.001 | 0.009 | 164.7 |
| ميانگين | 0.011 | 0.001 | 0.009 | 170.1 |

لختی دورانی محاسبه شده برای استوانه: 0.0035

لختی دورانی محاسبه شده برای ديسک:0.0004

علل خطا در زير شرح داده شده است:

* علت اصلی خطا وجود اصطکاک و گشتاور ناشی از آن است که در محاسبات ما وارد نشده است.
* جرم داشتن نخ
* لغزيدن اندک نخ بر روی قرقره و جرم داشتن قرقره
* متقارن نبودن اشکال (مثلا کره کاملا کره نيست)
* رها نکردن وزنه دقيقا پيش از حسگر (که البته فاصله ی آنها بسيار کم است)
* خطای وسايل آزمايش در اندازه گيری طول و زمان
* لغزيدن اندک ميله در جايگاه خود يا افقی نبودن کامل سطح دوران (لق بودن محور)

**خواسته ی 2**

محاسبه ی لختی دورانی از راه آزمايش مانند قسمت قبل است، برای محاسبه ی لختی دورانی از نظر تئوری هم می توان از قضيه ی محورهای موازی که در بخش نظری توضيح داده شد، استفاده کرد. نتايج محاسبات در زير آورده شده است: (همه ی لختی ها بر حسب  هستند.)

جدول 15 - لختی دورانی مربوط به جدول 6

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| رديف | لختی دورانی | درصد خطای نسبی |
| 1 | 0.012 | 182.7 |
| 2 | 0.013 | 186.9 |
| 3 | 0.012 | 184.1 |
| ميانگين | 0.013 | 184.6 |

مقدار محاسبه شده:  0.0044

جدول 16 - لختی دورانی مربوط به جدول 7

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| رديف | لختی دورانی | درصد خطای نسبی |
| 1 | 0.015 | 204.5 |
| 2 | 0.013 | 175.3 |
| 3 | 0.015 | 215.9 |
| ميانگين | 0.015 | 198.6 |

مقدار محاسبه شده:  0.0049

جدول 17 - لختی دورانی مربوط به جدول 8

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| رديف | لختی دورانی | درصد خطای نسبی |
| 1 | 0.019 | 201.5 |
| 2 | 0.019 | 199.2 |
| 3 | 0.020 | 213.5 |
| ميانگين | 0.020 | 204.7 |

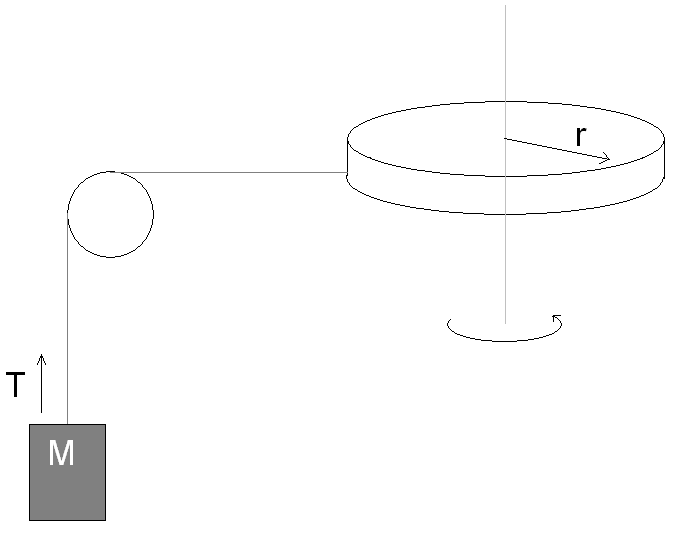
مقدار محاسبه شده:  0.0064

جدول 18 - لختی دورانی مربوط به جدول 9

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| رديف | لختی دورانی | درصد خطای نسبی |
| 1 | 0.041 | 356.6 |
| 2 | 0.039 | 334.1 |
| 3 | 0.039 | 343.0 |
|  | 0.040 | 344.6 |

مقدار محاسبه شده:  0.0089

با فرض وجود اصطکاک روابط مربوط را می نويسيم:



محاسبه ی لختی دورانی در حالت وجود اصطکاک

روابط نيرو و گشتاور:



که می خواهيم از اين رابطه لختی I را محاسبه کنيم، پس از رابطه ی اول T را جاگذاری می کنيم:



همان طور که ديده می شود، چون ما نيروی اصطکاک را در نظر نمی گيريم، مقداری که به دست می آوريم، با مقدار واقعی به اندازه ی  است، با دور کردن مرکز جرم از مرکز دوران، همان طور که از جداول بر می آيد، t کاهش می يابد و چون در فرمول t در مخرج است، ضريب نيروی اصطکاک و در نتيجه تاثير آن افزايش پيدا می کند و خطای نسبی زياد می شود، که اين موضوع از جداول هم قابل مشاهده است.

**خواسته ی 3**

نحوه ی بدست آوردن لختی دورانی در حالتی که نيروی اصطکاک وجود داشته باشد، در خواسته ی قبل (خواسته ی 2) محاسبه شد و فقط نتيجه در اينجا آورده می شود:



و با توجه به روابط سينماتيکی:



چون l و t را داريم، می توانيم a را بدست آوريم و گشتاور نيروی اصطکاک از رابطه ی زير بدست می آيد:



که در آن رابطه I لختی دورانی محاسبه شده از طريف اندازه گيری جرم و شعاع و ... است. (دقت کنيد نمی توانيم در اين رابطه I بدست آمده از آزمايش را قرار دهيم، چون آن وقت گشتاور اصطکاک را صفر بدست می آوريم!) برای جداول 4 و 5 نيز لختی مجموع لختی دورانی محاسبه شده استوانه يا پوسته ی استوانه ای و ديسک را قرار می دهيم.

در جداول زير گشتاور اصطکاک برای جداول 1 تا 9 آورده شده است:

جدول 19 - گشتاور نيروی اصطکاک برای جدول 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| رديف | لختی دورانی محاسبه شده ( ) | جرم وزنه ی اضافه شده (گرم) | شتاب سقوط (متر بر مجذور ثانيه) | گشتاور نيروی اصطکاک (نيوتون متر) |
| 1 | 0.0067 | 149.7 | 0.046 | 0.024 |
| 2 | 0.0067 | 149.7 | 0.044 | 0.025 |
| 3 | 0.0067 | 149.7 | 0.047 | 0.024 |
| ميانگين | | | | 0.025 |

جدول 20 - گشتاور نيروی اصطکاک برای جدول 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| رديف | لختی دورانی محاسبه شده ( ) | جرم وزنه ی اضافه شده (گرم) | شتاب سقوط (متر بر مجذور ثانيه) | گشتاور نيروی اصطکاک (نيوتون متر) |
| 1 | 0.004 | 149.9 | 0.13 | 0.015 |
| 2 | 0.004 | 149.8 | 0.13 | 0.016 |
| 3 | 0.004 | 149.9 | 0.13 | 0.015 |
| ميانگين | | | | 0.015 |

جدول 21 - گشتاور نيروی اصطکاک برای جدول 3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| رديف | لختی دورانی محاسبه شده ( ) | جرم وزنه ی اضافه شده (گرم) | شتاب سقوط (متر بر مجذور ثانيه) | گشتاور نيروی اصطکاک (نيوتون متر) |
| 1 | 0.004 | 149.8 | 0.081 | 0.024 |
| 2 | 0.004 | 149.9 | 0.061 | 0.027 |
| 3 | 0.004 | 149.8 | 0.064 | 0.026 |
| ميانگين | | | | 0.026 |

جدول 22 - گشتاور نيروی اصطکاک برای جدول 4

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| رديف | لختی دورانی محاسبه شده ( ) | جرم وزنه ی اضافه شده (گرم) | شتاب سقوط (متر بر مجذور ثانيه) | گشتاور نيروی اصطکاک (نيوتون متر) |
| 1 | 0.002 | 149.8 | 0.12 | 0.025 |
| 2 | 0.002 | 149.7 | 0.13 | 0.024 |
| 3 | 0.002 | 149.8 | 0.13 | 0.025 |
| ميانگين | | | | 0.025 |

جدول 23 - گشتاور نيروی اصطکاک برای جدول 5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| رديف | لختی دورانی محاسبه شده ( ) | جرم وزنه ی اضافه شده (گرم) | شتاب سقوط (متر بر مجذور ثانيه) | گشتاور نيروی اصطکاک (نيوتون متر) |
| 1 | 0.004 | 149.8 | 0.081 | 0.025 |
| 2 | 0.004 | 149.8 | 0.085 | 0.025 |
| 3 | 0.004 | 149.7 | 0.086 | 0.025 |
| ميانگين | | | | 0.025 |

جدول 24 - گشتاور نيروی اصطکاک برای جدول 6

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| رديف | لختی دورانی محاسبه شده ( ) | جرم وزنه ی اضافه شده (گرم) | شتاب سقوط (متر بر مجذور ثانيه) | گشتاور نيروی اصطکاک (نيوتون متر) |
| 1 | 0.0044 | 149.7 | 0.073 | 0.024 |
| 2 | 0.0044 | 149.7 | 0.072 | 0.024 |
| 3 | 0.0044 | 149.8 | 0.073 | 0.024 |
| ميانگين | | | | 0.024 |

جدول 25 - گشتاور نيروی اصطکاک برای جدول 7

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| رديف | لختی دورانی محاسبه شده ( ) | جرم وزنه ی اضافه شده (گرم) | شتاب سقوط (متر بر مجذور ثانيه) | گشتاور نيروی اصطکاک (نيوتون متر) |
| 1 | 0.0049 | 149.7 | 0.061 | 0.025 |
| 2 | 0.0049 | 149.8 | 0.067 | 0.023 |
| 3 | 0.0049 | 149.7 | 0.059 | 0.025 |
| ميانگين | | | | 0.024 |

جدول 26 - گشتاور نيروی اصطکاک برای جدول 8

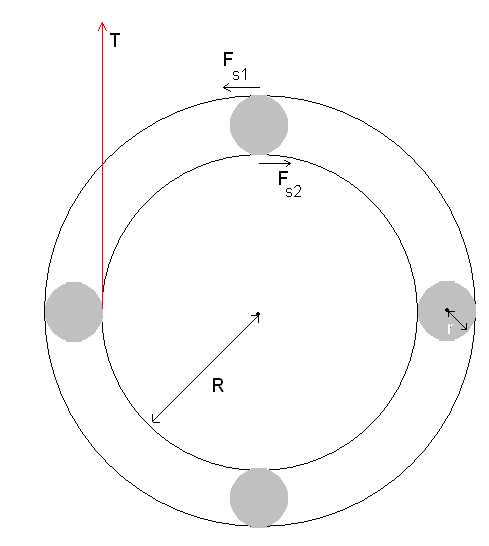
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| رديف | لختی دورانی محاسبه شده ( ) | جرم وزنه ی اضافه شده (گرم) | شتاب سقوط (متر بر مجذور ثانيه) | گشتاور نيروی اصطکاک (نيوتون متر) |
| 1 | 0.0064 | 149.7 | 0.047 | 0.025 |
| 2 | 0.0064 | 149.8 | 0.048 | 0.025 |
| 3 | 0.0064 | 149.7 | 0.045 | 0.025 |
| ميانگين | | | | 0.025 |

جدول 27 - گشتاور نيروی اصطکاک برای جدول 9

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| رديف | لختی دورانی محاسبه شده ( ) | جرم وزنه ی اضافه شده (گرم) | شتاب سقوط (متر بر مجذور ثانيه) | گشتاور نيروی اصطکاک (نيوتون متر) |
| 1 | 0.0089 | 149.9 | 0.022 | 0.029 |
| 2 | 0.0089 | 149.8 | 0.024 | 0.028 |
| 3 | 0.0089 | 149.9 | 0.023 | 0.029 |
| ميانگين | | | | 0.029 |

**خواسته ی 4**

برای محاسبه ی گشتاور اصطکاک، ساختار درونی بلبرينگ را بررسی می کنيم. در شکل زير شمای کلی بلبرينگ کشيده شده است:



فرض کنيد اين بلبرينگ n مهره ی کوچک دارد که هرکدام بين دو سطح غلتش می کنند که سطح بيرونی ثابت است و سطح درونی توسط نيروی T نخ کشيده می شود. در ضمن نيروهاي اصطکاک Fs1 و Fs2 به هر مهره وارد می شود و گشتاور اصطکاکی که ما در اين مساله آن را بررسی می کنيم، عکس العمل Fs2 است که به حلقه ی درونی وارد می شود و گشتاوری در خلاف جهت نيروی T وارد می کند. همچنين فرض کنيد لختی دورانی هر مهره ی کوچک برابر Is و جرم آن ms است. همچنين فرض کنيد لختی حلقه ی بلبرينگ همراه چيزی که روی آن می چرخد (کره يا ميله يا ...) برابر IB باشد. a را شتاب خطی حرکت حلقه ی بلبرينگ و اجسام روی آن (و همچنين شتاب وزنه ی به جرم M که در انتهای نخ قرار دارد) در نظر بگيريد. در اين صورت شتاب مرکز جرم هر مهره، برابر a/2 خواهد بود. (چون مهره روی حلقه ی بيرونی که ساکن است می غلتد و بنابراين سرعت نقطه ی بيرونی آن که با حلقه ی درونی بلبرينگ تماس دارد، دو برابر سرعت مرکز جرم است و اين سرعت هم به خاطر فرض غلتش کامل روی حلقه ی درونی برابر سرعت حلقه است که با مشتق گيری از طرفين رابطه ی گفته شده برای شتاب نتيجه می شود.) با اين فرض ها می توان چهار رابطه ی زير را نوشت

****

که رابطه ی اول قانون دوم نيوتن برای هر مهره است، رابطه ی دوم و سوم  برای مهره و حلقه هستند (n تعداد مهره هاست) و رابطه ی چهارم قانون دوم نيوتن برای جسم در حال سقوط است.

در اين چهار معادله چهار مجهول Fs2، Fs1، T و a مجهول هستند و چون چهار معادله داريم، می توانيم همه را حساب کنيم ولی ما نيروی اصطکاک Fs2 که گشتاور اصطکاک را ايجاد می کند نياز داريم. به دليل طولانی بودن محاسبات برای بدست آوردن Fs2 از آوردن آن در اينجا اجتناب می کنيم و يکراست جواب را می نويسم:



از آنجايي که شعاع اثر گشتاور اصطکاک R است برای پيدا کردن حالتهايي که در آن گشتاور اصطکاک بيشتر است، کافی است حالاتی را پيدا کنيم که خود نيروی اصطکاک بيشتر است.

همان طور که از معادله پيداست، با زياد شدن IB يعنی لختی دورانی جسمی که دوران می کند (استوانه يا کره يا ...) گشتاور اصطکاک نيز افزايش می يابد (نتايج آزمايش نيز کمابيش اين موضوع را تاييد می کنند). برای فهميدن تاثير M بر روی اصطکاک، ابتدا فرمول را بازنويسی می کنيم و سپس از آن مشتق می گيريم:



همان طور که ديده می شود،  صورت صفر است و به دليل مثبت بودن ضريب  مشتق هميشه مثبت است و به ازای افزايش جرم M (کفه و وزنه های روی آن) گشتاور اصطکاک افزايش می يابد.

**خواسته ی 5**

می توان به يک جسم که لختی آن را با توجه به مشخصات ظاهری آن محاسبه می کنيم، يک سرعت اوليه بدهيم و اندازه بگيريم که پس از چه مدتی ساکن می شود و با توجه به آن گشتاور نيروی اصطکاک را محاسبه کنيم. روابط در زير آمده است:

